

Midtoets Lineaire Algebra 1, 17 december 2007

De toets bestaat uit 6 vraagstukken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Gebruik Gauss-eliminatie om de matrix A op rij-echelonvorm te brengen.
- Bepaal de nulruimte $N(A)$ van A .
- Bepaal een basis van $N(A)$.
- Bepaal de dimensie van $N(A)$.

2. Stel dat A een $n \times n$ matrix is.

- Leg uit wat we bedoelen met de uitspraak dat A niet-singulier is, en leg uit wat we verstaan onder de inverse A^{-1} van A .
- Stel A niet-singulier. Stel dat A^{-1} de inverse is van A . Stel B een $n \times n$ matrix. Toon aan: als $AB = I$ dan geldt $B = A^{-1}$.
- Stel $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Toon aan: als A niet singulier is dan is aA niet-singulier en $(aA)^{-1} = \frac{1}{a}A^{-1}$.
- Toon aan: als A niet-singulier is dan heeft het stelsel vergelijkingen $Ax = 0$ alleen $x = 0$ als oplossing.

3. Laat A de matrix zijn gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Ga na of de matrix A een inverse heeft.

- b. Bereken $\det(A)$.
- c. Bepaal een basis van de rij-ruimte van A .
- d. Bepaal de rang van A .

4. Bekijk voor elke $x \in \mathbb{R}$ de 3×3 matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & x \\ 1 & x & 3 \end{pmatrix}.$$

- a. Bepaal $\det(A)$ als functie van x .
 - b. Bepaal alle waarden van x waarvoor A singulier is.
5. a. Stel V een vectorruimte, en v_1, v_2, \dots, v_k vectoren in V . Leg uit wat we bedoelen met de uitspraak dat de verzameling $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ lineair onafhankelijk is.
- b. Toon aan dat elke eindige verzameling vectoren die de 0-vector bevat lineair afhankelijk is.
 - c. Bekijk in de vectorruimte P_3 de vectoren $2, x^2, x, 2x + 3$. Ga na of deze vectoren lineair onafhankelijk zijn.
6. We bekijken in de vectorruimte $\mathbb{R}^{n \times n}$ de deelverzameling S van alle symmetrische matrices, i.e.

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\}.$$

- a. Laat zien dat S een deelruimte is van $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- b. Neem nu aan dat $n = 2$. Bepaal vectoren in S die S opspannen en die lineair onafhankelijk zijn
- c. Neem aan dat $n = 2$. Wat is de dimensie van S ?

Puntenwaardering:

U krijgt 10 punten gratis. Voor elk vraagstuk krijgt u maximaal 15 punten. Het eindcijfer wordt bepaald door het totale aantal punten door 10 te delen.